

Un Nuevo Modelo para la Estimación del Tiempo de Espera en Paraderos de Transporte Público

Cepeda, M.¹

Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile

Resumen

En este artículo se presenta el desarrollo de un nuevo modelo de estimación del tiempo medio de espera de los pasajeros que se presentan a un paradero simple de transporte público, y deben esperar hasta que pase un vehículo con capacidad suficiente para abordarlo. La mayoría de los modelos existentes en la actualidad consideran que este tiempo depende sólo de la capacidad media residual de los vehículos y del flujo medio de pasajeros en el paradero bajo estudio. Sin embargo, nuestros resultados teóricos y simulados demuestran que el tiempo medio de espera es fuertemente afectado por otros flujos de la red y que los modelos de capacidad residual media pueden subestimar considerablemente su valor. Se analiza aquí cómo la variabilidad de los lugares disponibles en los autobuses afecta los tiempos medios de espera y se presenta un modelo que incorpora dicho efecto. A diferencia de los modelos de capacidad residual, que se comportan bien sólo en niveles de congestión bajos; este nuevo modelo es más robusto, en el sentido que su desempeño es muy bueno para niveles de congestión bajos y medios. Una comparación con otros modelos existentes, muestra que con niveles medios de congestión (50% de utilización de la red) estos últimos estiman el tiempo medio de espera con errores promedios superiores al 40%, mientras que el error medio del modelo propuesto es inferior al 6%. Desde un punto de vista computacional el nuevo modelo es fácil de implementar en los programas de asignación de pasajeros -- que permiten estudiar el uso de las redes de transporte público -- debido a que corresponde a una fórmula cerrada, de evaluación directa con información que generalmente está disponible en dichos programas o es fácil de obtener.

Palabras Clave: flujo, espera, paradero, pasajeros, público, tiempo, transporte.

1. Introducción.

Los métodos usados para la planificación de las redes de transporte, tanto urbano como interurbano, público como privado, requieren del uso de modelos de asignación los cuales predicen la manera en que los usuarios elegirán las rutas para llegar desde sus orígenes a sus destinos. Dicha elección depende de muchos factores, algunos medibles: tales como tiempo de viaje, costo, etc.; y otros bastante más subjetivos, como seguridad, comodidad o la importancia que le da el usuario a cada uno de los demás factores.

Diferentes estudios -- incluso los primeros algoritmos sugeridos para encontrar los trayectos de viaje en redes de transporte público tales como Dial [6], Fearnside y Draper [7] y LeClerq [10] -- reconocen que el tiempo de espera en los paraderos es una componente muy importante en las decisiones de los usuarios de dicho servicio; y es posiblemente la más importante debido al desagrado que produce esta (in)actividad para la mayoría de la personas.

Esto es particularmente importante en el caso de servicios congestionados, ya que el tiempo de espera es muy sensible al nivel de congestión de la red.

Si bien se han hecho considerables avances en las últimas dos décadas en el desarrollo de modelos de elección de ruta para redes de tránsito, la cuestión de cómo modelar los efectos de la congestión en los tiempos de espera ha recibido escasa atención.

Antes de continuar, es conveniente especificar qué entenderemos por niveles de congestión en nuestro contexto. Daremos una definición intuitiva que nos facilitará la clasificación de los modelos de estimación de tiempos de espera (existentes y propuestos) según el rango de congestión en que los supuestos (explícitos o subyacentes) de dichos modelos tienen validez.

- Una **red sin congestión** es aquella donde cada autobús que pasa por un paradero tiene disponibilidad suficiente para llevar a todos los pasajeros que estaban esperando.

Esto es, la probabilidad de tener que esperar por un segundo autobús es aproximadamente nula. En este caso el tiempo medio de espera equivale al tiempo medio hasta la llegada del próximo autobús.

- Una **red con congestión baja** es aquella donde en cada autobús que llega al paradero habrá un número no despreciable de lugares disponibles (sea porque trae espacio, o porque algunos pasajeros desciende de él en el paradero bajo estudio). Esto es, la probabilidad que un autobús no tenga espacios disponibles es aproximadamente cero. En este caso es posible tener que esperar por un segundo vehículo, pero este fenómeno es causado por la longitud de la cola en el paradero y no porque los buses vengan llenos.

- Una **red medianamente congestionada** es aquella donde existe una probabilidad considerable que los buses pasen llenos, pero la probabilidad que pasen dos buses llenos seguidos es aproximadamente igual a la probabilidad de que dos buses elegidos al azar pasen llenos. Esto es, la correlación entre buses llenos es despreciable.

- Una **red altamente congestionada** es aquella donde existe una correlación (positiva) no despreciable entre los buses que pasan llenos. Esto es, es más probable ver pasar un autobús lleno si el anterior pasó lleno que si el anterior pasó con espacios disponibles.

2. Esperar por un autobús versus esperar hasta abordar.

En el caso sin congestión la espera termina cuando pasa un autobús, sin embargo con cualquier nivel de congestión (bajo, medio o alto) se debe hacer distinción entre estos dos conceptos. En la primera parte de esta sección se analiza el tiempo medio de espera hasta la pasada del próximo autobús, sin embargo a continuación (y por el resto de este artículo) entenderemos por tiempo de espera el lapso entre la llegada del pasajero al paradero y el momento que logra abordar un autobús.

En el caso teórico más simple, donde los tiempos entre pasadas de autobuses siguen una distribución exponencial y los vehículos tienen siempre capacidad suficiente para llevar a todos los usuarios que esperan en el paradero (esto

es, buses de capacidad infinita), el tiempo medio de espera de los pasajeros que llegan al paradero (de acuerdo a un proceso no coordinado con la pasada de los autobuses) es exactamente igual al tiempo medio entre autobuses, debido a la falta de memoria del proceso poissoniano. Un resultado un poco más general fue el publicado por Holroyd et Scraggs [9], el cual considera que el tiempo entre autobuses -sin restricción de espacio- sigue una distribución cualquiera con media $T_l = 1/f_l$ (donde f_l corresponde a la frecuencia nominal de la línea de buses) y varianza σ_l^2 . Ellos demuestran que si cada pasajero llega al paradero de acuerdo a una distribución uniforme entre pasadas de autobús (y donde la cantidad de pasajeros es proporcional al lapso entre vehículos), entonces el tiempo medio de espera de los pasajeros viene dado por la siguiente expresión:

$$W_l = \frac{1}{2}(T_l + \frac{\sigma_l^2}{T_l}) \quad (1)$$

Consideremos, ahora, dos casos extremos (extremos aceptables en la práctica) para el valor de W_l : el caso determinista (tiempo constante entre pasadas de vehículos y por lo tanto $\sigma_l^2=0$), donde $W_l=T_l/2$, y el caso exponencial ($\sigma_l^2=T_l^2$), donde $W_l=T_l/2$. Así, para cualquier distribución que esté "entre" estos 2 casos, el tiempo medio de espera satisface $T_l/2 \leq W_l \leq T_l$. Teóricamente se puede plantear el caso donde $\sigma_l^2 > T_l$, pero atenta demasiado contra nuestra intuición (considerando que los vehículos tiene capacidad infinita), ya que implicaría que el tiempo medio de espera es mayor que el tiempo medio entre pasadas de autobuses.

Debido a lo anterior muchos autores asignan al tiempo de espera un valor por medio de la expresión:

$$W_l = \alpha T_l, \quad (2)$$

donde α --- $1/2 < \alpha < 1$ --- es el parámetro utilizado para modelar el efecto de la variabilidad del tiempo entre pasadas de autobuses. Incluso valores para $\alpha < 1/2$ son usados por algunos autores para modelar el caso en que los pasajeros conocen el horario de pasada de los buses y usan dicha información para reducir sus tiempos de espera.

Este simple modelo $W_l=T_l$, para algún valor de α , es una estimación del tiempo medio de espera desde la llegada de un pasajero al paradero hasta la pasada del próximo autobús,



pero no considera la posibilidad que el próximo vehículo no disponga de espacio suficiente para abordarlo; en cuyo caso los pasajeros que no puedan abordar deberán esperar hasta el próximo autobús. Es decir, este modelo simple es válido sólo en el caso sin congestión (de acuerdo a nuestra definición).

Si consideramos que existe la probabilidad que algún pasajero deba esperar por el segundo vehículo, estamos reconociendo que los autobuses tienen en realidad una capacidad finita y la congestión se vuelve un factor relevante. Incluso si los pasajeros conocieran el horario de pasada de los buses, no podrían prever la posibilidad de tener que esperar por un segundo o tercer autobús hasta obtener un espacio disponible.

El primero en formular un modelo general de asignación de pasajeros en una red de transporte público congestionada fue Gendreau [8] en su tesis doctoral (1984). Fue también el primero en construir modelos para estimar el efecto de la congestión en el tiempo de espera utilizando un enfoque de teoría de colas. Para resultados más recientes referirse a Bouzaïene-Ayari et al. [2] y Beltrán [1]. Los modelos de estos tres autores corresponden a modelos de “capacidad media residual”, debido a que en ellos la carga de los vehículos en cualquier paradero es reemplazada por la carga media, y así la capacidad disponible en los vehículos en un momento cualquiera deja de ser una variable aleatoria al ser reemplazada por su promedio. De esta manera todos los paraderos son modelados como “paraderos iniciales” -- en los cuales los autobuses parten vacíos -- que son servidos por buses de una capacidad fija igual a la capacidad media observada en el paradero bajo estudio (o en rigor, al entero más cercano a dicho valor), y por lo tanto se anula la posibilidad de que pase un vehículo sin lugares disponibles.

En cualquier modelo de teoría de colas se acepta que la omisión de fuentes de variabilidad en los sistemas de servicio conlleva una subestimación del tiempo medio de espera en la cola. En consecuencia, es de esperar que los modelos de capacidad media residual den estimaciones del tiempo medio de espera en los paraderos inferiores a los valores exactos; excepto para redes de transporte con baja o nula congestión.

La intuición nos indica que el flujo de pasajeros que vienen y permanecen en los autobuses (que llamaremos flujo “a

bordo”) y aquellos que descienden (flujo “descendente”) tienen un impacto en el tiempo medio de espera en cualquier paradero intermedio de una línea de transporte público: mientras el flujo a bordo debería incrementar la variabilidad de los lugares disponibles, el flujo descendente debería tener un efecto compensatorio, disminuyendo dicha variabilidad. En este artículo presentaremos un análisis del efecto del primer factor y un modelo que permite incorporar satisfactoriamente este efecto para niveles de congestión bajo y medio. Para modelos más generales, donde el segundo efecto es considerado, se puede consultar Cepeda [3].

Los tres modelos mencionados anteriormente son basados en la teoría de colas, por lo tanto los tiempos de espera estimados tienden a infinito cuando el flujo medio de pasajeros tiende a la cantidad media de lugares disponibles en los vehículos (esto es, cuando la tasa de utilización tiende a uno). Esta propiedad -- teóricamente correcta -- es indeseable en muchos modelos de tránsito debido a las condiciones necesarias para asegurar la existencia de equilibrios y/o la convergencia de los algoritmos; sin embargo Cominetti y Correa [5] primero y Cepeda et al. [4] más tarde, han desarrollado un modelo de tránsito que es capaz de tratar con funciones de tiempo que presentan comportamientos asintóticos. En cualquier caso, un modelo con comportamiento asintótico puede ser fácilmente utilizado para construir un modelo sin dicho comportamiento. Sea $W(v)$ el modelo de capacidad estricta que permite estimar el tiempo medio de espera W en función del flujo v , mientras $v < V$, donde V representa el flujo de saturación. El siguiente modelo, $\hat{W}(v)$ puede ser una adecuada alternativa si se quiere evitar los inconvenientes del modelo de capacidad estricta,

$$\hat{W}(v) = \begin{cases} W(v) & \text{si } v \leq \alpha V \\ W(\alpha V) + W'(\alpha V)(v - \alpha V) & \text{si } v > \alpha V \end{cases}$$

donde, α es un valor tan cercano a 1 como se desee.

Es importante destacar que la congestión en los paraderos no solo afecta los tiempos medios de espera sino también la distribución de pasajeros en las diferentes líneas para el caso de paraderos múltiples (aquellos por los cuales pasan buses de diferentes líneas), sin embargo este artículo trata sólo el caso de paraderos simples (aquellos que son servidos por una única línea, o donde las diversas líneas no comparten ningún destino común).

3. Tiempo medio de espera: modelos exactos.

Si a un paradero cualquiera los buses llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa μ y la distribución de lugares disponibles en los buses es conocida, Cominetti and Correa [5] mostraron que el valor exacto del tiempo medio de espera de los pasajeros que se presentan al paradero de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ viene dado por

$$W(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho(\lambda)}{1 - \rho(\lambda)} \right), \quad (3)$$

donde $\rho = (\rho)\lambda$ es la única solución en el intervalo $[0,1)$ de la ecuación

$$\mu \sum_{i=1}^K q_i (\rho + \rho^2 + \dots + \rho^i) = \lambda \quad (4)$$

dados q_i , la probabilidad de tener exactamente i lugares disponibles en los buses, $i=1,\dots,K$, y K la capacidad fija de los autobuses de la línea.

En el caso de un paradero de inicio de línea es claro que $q_K=1$ y $q_i=0$ para todo $i \neq K$. Así la ecuación (4) queda

$$\mu(\rho + \rho^2 + \dots + \rho^K) = \lambda \quad (5)$$

Esta última expresión fue obtenida mucho antes por Gendreau [8]. También se sabe que en régimen estacionario la probabilidad que el número de personas en la cola sea n (en un momento cualquiera, en particular al momento de llegar un autobús), denotado por π_n , es dado por una ley de probabilidad que sigue una distribución geométrica:

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n \quad (6)$$

A diferencia de los modelos de “paradero inicial” antes mencionados, nuestro análisis se basa en el segundo paradero de una línea. La Figura 1 representa la fracción de línea que nos interesa: al paradero inicial (I) llegan pasajeros que

tienen por destino el segundo paradero (S) y pasajeros que van a cualquier paradero posterior (pasajeros tipo 1). Las llegadas de estos tipos de pasajeros son de acuerdo a dos procesos de Poisson independientes de tasa λ_2 y λ_1 , respectivamente.

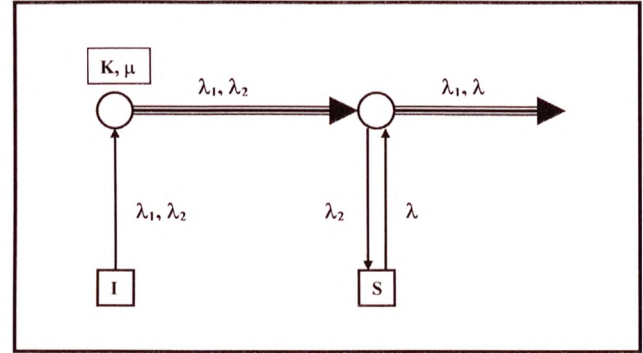


Figura 1: Primer y segundo paradero

Para el paradero inicial la ecuación (5) puede ser resuelta numéricamente, y su solución ρ_1 reemplazada en la expresión (6) para obtener los valores de π_n . En régimen estacionario, la probabilidad que exactamente n pasajeros aborden el próximo autobús es igual a la probabilidad que haya n personas en la cola, para todo $n < K$. Además, la probabilidad que exactamente K personas aborden el próximo autobús es igual a la probabilidad que haya al menos K personas en la cola. Sea $\hat{q}_i$ la probabilidad de tener i lugares disponibles en el autobús una vez que éste deja el paradero, así:

$$\hat{q}_i = \begin{cases} \sum_{n=K}^{\infty} \pi_n = \rho^K & \text{si } i = 0 \\ \pi_{K-i} & \text{si } i = 1, \dots, K \end{cases} \quad (7)$$

Sea q_i la probabilidad de tener i lugares disponibles en el autobús para los pasajeros que esperan en el segundo paradero de la línea. Note que, en general, $q_i \neq \hat{q}_i$ debido al flujo de pasajeros que descenderá en dicho paradero, desocupando algunos lugares para los nuevos pasajeros. Sólo cuando $\lambda_2 = 0$ podemos asegurar que $q_i = \hat{q}_i$ para todo i , pero ese es precisamente el caso que nos interesa.

Assumiendo que las probabilidades q_i son independientes entre un autobús y el siguiente, lo cual es válido para niveles de congestión nulo a medio (de acuerdo a nuestra conveniente definición de los niveles de congestión) y utilizando la expresión (3) se puede obtener el tiempo medio de espera para los pasajeros que llegan al segundo paradero,

después de resolver la ecuación (4) mediante métodos numéricos. Note que en rigor las probabilidades q_i no son independientes entre un autobús y el siguiente, ya que el estado estable no implica independencia; de hecho para niveles extremos de congestión existe una alta correlación (positiva) en la carga de los vehículos.

4. El efecto de la variabilidad de espacios.

El efecto de la variabilidad de lugares disponibles de los autobuses en el tiempo de espera de los pasajeros ha sido objeto de diversos estudios (entre ellos Kadosh [11] y Gendreau [8]). Particularmente, en un análisis basado en simulación Kadosh sugiere usar una distribución binomial de parámetros $n=K$ y $p=\bar{K}/K$ para generar esta cantidad, donde K y $\bar{K}$ son la capacidad fija y la capacidad residual media de los buses que sirven al paradero bajo estudio, respectivamente.

Siguiendo la sugerencia de Kadosh, Gendreau concluye (con sus propias simulaciones) que el efecto en los tiempos de espera de esta fuente de variabilidad es despreciable. Sin embargo, él nota también que esta forma de generar la cantidad de lugares disponibles da una muy baja probabilidad de generar buses completamente llenos.

En sus simulaciones Gendreau analizó un paradero servido por autobuses con una capacidad media residual ($\bar{K}$) de 24 espacios disponibles, y un tiempo medio entre pasadas de autobuses, $1/\mu$, de 19.2 unidades de tiempo. La tasa de llegada al paradero era de una persona cada 2 unidades de tiempo, esto es, $\lambda=1/2$. La tasa de ocupación de este paradero es, por lo tanto, $O_c = \lambda/\mu K = 0.4$.

Si la cantidad de lugares disponibles en los autobuses (que es una variable aleatoria con media igual a 24) es remplazada por una constante, esto es equivalente a decir que el paradero simulado por Gendreau es un paradero inicial servido por buses con capacidad fija de 24 espacios disponibles.

Si nos concentramos ahora en el segundo paradero, muchas combinaciones de K y λ nos permitirán observar una capacidad media residual $\bar{K}=24$ en él. Basta con definir cualquier valor de $K \geq \bar{K}$ y tomar una tasa de pasajeros en el paradero inicial $\lambda_1 = (K-\bar{K})/\mu$, para preservar la capacidad media residual

$$\bar{K} = \sum_{i=0}^K i q_i = K - \frac{\lambda_1}{\mu} \quad (8)$$

fija, en este caso a 24. Sin embargo mientras mayor sea K (y en consecuencia mayor λ_1) mayor será la variabilidad de lugares disponibles

$$= \frac{\lambda}{\mu(1-\rho^K)} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} - \rho^K(K + \bar{K} + 1) \right). \quad (9)$$

Para una demostración de las expresiones (8) y (9) ver Cepeda [3].

Para determinar el efecto de la variabilidad sobre el tiempo medio de espera 11 combinaciones de K y λ_1 fueron utilizadas para el paradero inicial, incrementando progresivamente el valor de K desde 24 a 96 (el valor de λ_1 es aumentado consecuentemente desde 0 hasta 3.75 pasajeros por unidad de tiempo) lo cual lleva la desviación estándar desde $=0$ hasta $=32.28$. Estas 11 combinaciones tienen, por lo tanto, los mismos parámetros que el paradero utilizado por Gendreau, lo cual permite concluir que las diferencias observadas en los tiempos medios de espera se deben exclusivamente a la variabilidad de los lugares disponibles. La curva de más arriba en la Figura 2 muestra el comportamiento del tiempo medio de espera en función de la variabilidad de los lugares disponibles en los autobuses que dejan el paradero inicial. Las demás curvas muestran las mismas 11 combinaciones cuando la tasa de utilización del segundo paradero se reduce a 20% y cuando tiende a cero (0^+), respectivamente.

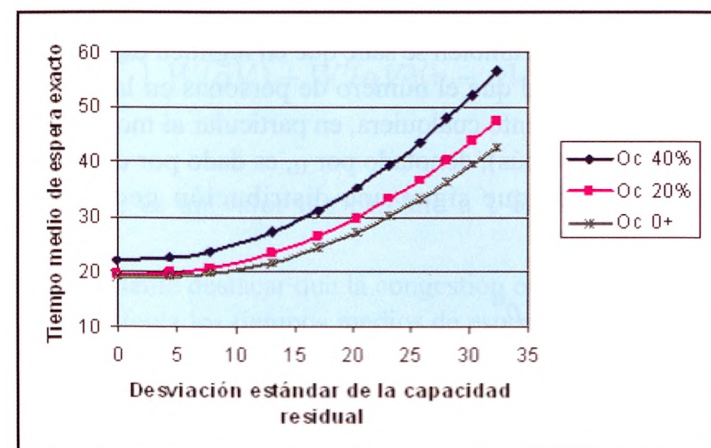


Figura 2: Efecto de la variabilidad de espacios

El comportamiento observado en todas las curvas puede ser explicado como la combinación de 2 factores: el intercepto que es debido a la congestión en el paradero bajo estudio (y que depende de su tasa de ocupación) y la curvatura que es debido a la variabilidad de espacios disponibles en los autobuses al dejar el paradero inicial.

Los modelos de capacidad residual que se presentan a continuación no harán distinción entre las 11 combinaciones en cada caso, y su objetivo será sólo estimar el valor del intercepto para cada una de estas curvas.

5. Modelos de Capacidad Residual Media.

Dadas las razones expuestas al comienzo, tres modelos de la literatura especializada fueron seleccionados, éstos corresponden a los desarrollados por Gendreau [8], Bouzaïene-Ayari et al. [2] y Beltrán [1]. Los 3 modelos utilizan los mismos parámetros: la capacidad residual media ($\bar{K}$), la frecuencia de la línea (μ) y la tasa de llegada de pasajeros al paradero bajo estudio (λ). Las ecuaciones que nos permiten estimar el tiempo medio de espera $\hat{W}$ en cada caso son:

1) Modelo simplificado de Gendreau para caso exponencial (con $\rho = \lambda / \bar{K}\mu$).

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^K (i - \bar{K})^2 q_i$$

2) Modelo con restricciones de capacidad explícita de Bouzaïene-Ayari et al., para el caso exponencial (donde $\beta = 0.8$, de acuerdo a lo sugerido por el autor).

$$\frac{1}{2u} \left\{ 1 + \frac{\bar{K} + \rho}{\bar{K}(1 - \rho)} - \rho \left(1 - \frac{1}{\bar{K}} \right) \left[\frac{e}{2} + \left(\frac{e}{2} - 2 \right) \rho^2 \right] \right\},$$

3) Modelo de Beltrán:

$$\frac{1}{\mu} + \frac{\beta}{2\mu} \left(\frac{\bar{K} + 2}{\bar{K} + 1} \right) \left(\frac{\lambda}{\bar{K}\mu - \lambda} \right)$$

Note que estos 3 modelos tienen la siguiente propiedad:

$$\frac{1}{\mu \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\bar{K}\mu} \right)^{\frac{2\bar{K}}{\bar{K}+1}} \right)}$$

que es consecuente con el supuesto (implícito) que $q_0 = 0$, lo cual es válido sólo para niveles de congestión nula o baja. Esto define la aplicabilidad de los modelos precedentes.

6. Propuesta: Modelo general

En primer lugar se presenta el enfoque utilizado por Beltrán [1] para desarrollar su modelo para paraderos de inicio de línea. Se propone una generalización de este esquema para paraderos intermedios, y finalmente se presenta un modelo particular.

6.1 Esquema de Beltrán

Primero la ecuación (5) se reestablece como:

$$\frac{1}{K}\rho + \frac{1}{K}\rho^2 + \dots + \frac{1}{K}\rho^K = \frac{\lambda}{\mu K}$$

La aproximación consiste en reemplazar el lado derecho de esta ecuación, la cual tiene la forma de $E(\rho^I)$, por una expresión de la forma $\rho^{E(I)}$. Así la ecuación aproximada para ρ queda:

$$\frac{1}{K}\rho + \frac{1}{K}\rho^2 + \dots + \frac{1}{K}\rho^K = \frac{\lambda}{\mu K}$$

cuya solución (que denotaremos $\hat{\rho}$) es:

$$\hat{\rho} = \left(\frac{\lambda}{\mu K} \right)^{\frac{2}{K+1}} \quad (10)$$

Por otro lado, la ecuación (5) puede ser re-escrita como



$$\tilde{\rho}^{\frac{\sum_{i=1}^K i}{K}} = \frac{\lambda}{\mu K}$$

cuyo lado derecho corresponde al tiempo medio de espera en ecuación (3). En consecuencia

$$W \approx \frac{1}{\mu(1 - \rho^K)} \quad (11)$$

Para cualquier paradero intermedio, la capacidad K es reemplazada por la capacidad residual media K en las expresiones (10) y (11).

6.2 Modelo Generalizado de Beltrán.

Sea C una variable aleatoria que da el número de lugares disponibles en los buses que llegan al paradero, tal que $P(C=i) = q_i$, $i=1, \dots, K$. Definiendo $a_i = \sum_{j=i..K} q_j$, $A = \sum_{i=1..K} a_i$ y $p_i = a_i/A$, la ecuación (4) queda:

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho}{1 - \rho^K} \right) = \frac{1}{\mu(1 - \rho^K)}$$

Usando ahora el esquema de Beltrán (de reemplazar $E(\rho^1)$, por $\rho^{E(1)}$), esta ecuación podría ser aproximada por $\rho^{\alpha} = \lambda/\mu A$, cuya solución es

$$p_1 \rho + p_2 \rho^2 + \dots + p_K \rho^K = \frac{\lambda}{\mu A}$$

Donde

$$\tilde{\rho} = \left(\frac{\lambda}{\mu A} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

y

$$A = \sum_{i=1}^K a_i = E(C)$$

Para una demostración de las expresiones anteriores ver Cepeda [3]. Así la expresión general para estimar queda

$$\tilde{\rho} = \left(\frac{\lambda}{\mu E(C)} \right)^{\frac{2E(C)}{E(C)+E(C^2)}} \quad (12)$$

Por otro lado, con una simple manipulación de (4) se puede despejar un término correspondiente al lado derecho de la expresión (3)

$$\alpha = \sum_{i=1}^K i p_i = \frac{E(C) + E(C^2)}{2E(C)}$$

obteniendo la siguiente expresión para estimar el tiempo medio de espera para este paradero:

$$W \approx \frac{1}{\mu \sum_{i=1}^K q_i (1 - \rho^i)} \quad (13)$$

Note que para la distribución de C supuesta en el caso de los modelos de capacidad residual media (o para un paradero inicial), se tiene que $E(C) = \bar{K}$ y $E(C^2) = \bar{K}^2$. Así las expresiones (12) y (13) se reducen a las expresiones (10) y (11), respectivamente, correspondientes al modelo de Beltrán. Un supuesto diferente acerca de la distribución de C permitirá construir un modelo alternativo, como el presentado a continuación.

6.3 Modelo de Capacidad Residual Variable (CRV)

Sea $q_0 = \rho_1^i$ la probabilidad que un autobús que llega al segundo paradero no tenga espacios disponibles, en función de ρ_1 . Este último valor corresponde a la solución de la ecuación (5) para el paradero inicial, el cual puede ser estimado utilizando la expresión (10). Así, considerando un flujo de pasajeros λ_1 en el paradero de inicio, un estimador para q_0 es dado por

6.4 Comparación y conclusiones.

$$\tilde{q}_0 = \left(\frac{\lambda_1}{\mu K} \right)^{\frac{2K}{K+1}} \quad (14)$$

A diferencia de un modelo de capacidad residual que supone solo un valor posible para la variable aleatoria C ($q_{\tilde{K}} = 1$ y $q_i = 0$ para todo $i \neq \tilde{K}$), nosotros aceptamos dos valores probables para C : 0 y $\tilde{K}$, tal que

$$q_i = \begin{cases} q_0 & \text{para } i = 0 \\ 1 - q_0 & \text{para } i = \tilde{K} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (15)$$

donde $\tilde{K} = \tilde{K} / (1 - q_0)$. En adelante asumiremos que $\tilde{K}$ es un entero, pero no es necesario aproximar su valor en la expresión final. La distribución dada para C tiene los siguientes momentos estadísticos: $E(C) = \tilde{K} = K - \lambda_1 / \mu$ y $E(C^2) = \tilde{K} \tilde{K}$. Con esto, las expresiones (12) y (13) quedan

$$\mu \sum_{i=1}^K q_i (1 - \rho^i) = \lambda \left(\frac{1 - \rho}{\rho} \right)$$

$$\tilde{W} = \frac{1}{\mu(1 - \tilde{\rho}^{\tilde{K}})(1 - \tilde{q}_0)} \quad (16)$$

respectivamente. Obteniendo la siguiente expresión para estimar el tiempo medio de espera en el segundo paradero en términos de K , μ , λ_1 y λ :

$$\tilde{W} = \frac{1}{\mu \left(1 - \left(\frac{\lambda_1}{\mu K} \right)^{\frac{2K}{K+1}} \right) \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu K - \lambda_1} \right)^{\beta} \right)} \quad (17)$$

donde

$$\tilde{\rho} = \left(\frac{\lambda}{\mu K} \right)^{\frac{2}{K+1}}$$

Finalmente presentamos una comparación de los errores en la estimación de los tiempos medios de espera para paraderos iniciales e intermedios.

La Tabla 1 muestra los errores (máximos y promedio) obtenidos por los modelos de Capacidad Residual Media en la estimación del tiempo medio de espera para diversas tasas de utilización de un paradero inicial. En este caso el nuevo modelo propuesto no aparece en la tabla ya que para un paradero inicial éste se reduce al modelo de Beltrán.

Gendreau		Bouzaïene-Ayari		Beltrán	
ϵ_{prom}	ϵ_{max}	ϵ_{prom}	ϵ_{max}	ϵ_{prom}	ϵ_{max}
2.4	4.2	7.0	12.2	4.0	6.0

Tabla 1: Errores (%) para paradero inicial

La Tabla 2 incluye los errores máximos y promedios en la estimación del tiempo medio de espera para los pasajeros que se presentan a un paradero intermedio. Se comparan los resultados de los tres modelos de obtenidos de la literatura con el modelo de Capacidad Residual Variable (CRV) propuesto, para diversas combinaciones de utilización tanto del paradero bajo estudio como de la carga de los autobuses.

Gendreau		Bouzaïene-Ayari		Beltrán		CRV	
ϵ_{prom}	ϵ_{max}	ϵ_{prom}	ϵ_{max}	ϵ_{prom}	ϵ_{max}	ϵ_{prom}	ϵ_{max}
32.9	83.5	32.2	85.6	30.7	82.7	5.5	19.3

Tabla 2: Errores (%) para segundo paradero

Se puede observar que mientras los modelos de capacidad media residual aumentan considerablemente sus errores para el caso de paraderos intermedios, el nuevo modelo propuesto presenta errores promedio muy similares a los obtenidos para el paradero inicial.

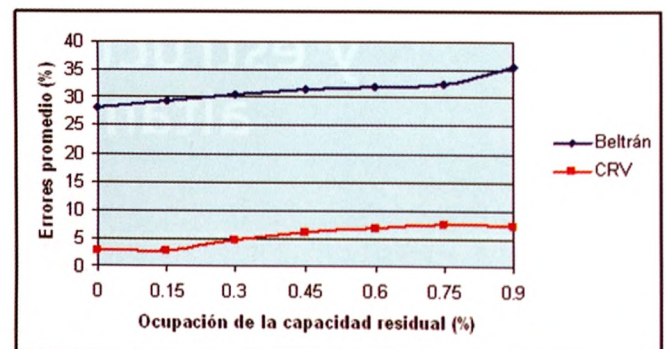


Figura 3: Comparación de errores.

Por último, la Figura 3 muestra la evolución de los errores promedio en función de la tasa de utilización en un paradero intermedio. La gráfica incluye al modelo de Beltrán (que es el de mejor desempeño dentro de los modelos de capacidad residual media) y el modelo propuesto.

Referencias

- [1] P. Beltrán, *Congestión y Equilibrio en Redes de Transporte Público*, Tesis de Magister en Ciencias de la Ingeniería Mención Transportes, Dpto. Ing. Civil, Universidad de Chile, 2002.
- [2] Bouzaïene-Ayari B., Gendreau M., and Nguyen S., "Modeling bus stops in transit networks: a survey and new formulations", *Transportation Science* 35(3), 304-321, (2001).
- [3] Cepeda M., *Modèle d'équilibre dans les réseaux de transport en commun: le cas des capacités explicites des services*, Ph.D. Thesis, Département d'Informatique et Recherche Opérationnelle, Publication 2002-43, CRT, U. de Montréal (2002).
- [4] Cepeda M., Cominetti R., and Florian M., "A frequency-based assignment model for congested transit networks with strict capacity constraints: characterization and computation of equilibria", *Transportation Research Part B* 40, 437-459, (2006).
- [5] Cominetti R. and Correa J., "Common-lines and passenger assignment in congested transit networks", *Transportation Science* 35(3), 250-267, (2001).
- [6] Dial R.B., "Transit pathfinder algorithms", *Highway Research Record* 205, 67-85, (1967).
- [7] Fearnside K. and Draper D.P., "Public transport assignment -- a new approach", *Traffic Engineering and Control*, 298-299, (1971).
- [8] Gendreau M., *Etude approfondie d'un modèle d'équilibre pour l'affectation de passagers dans les réseaux de transports en commun*, Ph.D. Thesis, Département d'Informatique et Recherche Opérationnelle, Publication 384, CRT, U. de Montréal (1984).
- [9] Holroyd E. and Scraggs D., "Waiting Times for Buses in Central London", *Traffic Engineering and Control* 8, 158-160 (1966).
- [10] Le Clercq F., "A public transport assignment model", *Traffic Engineering and Control*, 91-96, (1972).
- [11] Kadosch M., "Temps d'attente dans le transport urbain en commun", *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle* 10, 37-54, (1976).

Facultad de Ingeniería
Universidad Católica de la
Santísima Concepción
Alonso de Ribera 2850
Concepción, Chile
Tel.: (56) 41-2735301
Fax: (56) 41-2735300
mcepeda@ucsc.cl



**Empresa contratista en obras civiles
y estructurales con personal
altamente calificado.**

Teléfono: 41-2451190 - Celular: 09-92499155 - E-mail: tizvictor@yahoo.es